

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có trang)

Họ, tên thí sinh:.....

SBD:.....

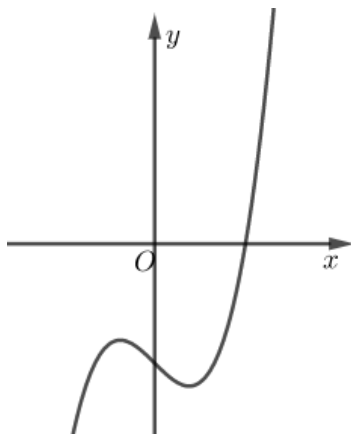
Mã đề thi

101

LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình dưới?



A. $y = -x^3 + 3x - 1$.

B. $y = x^4 - 2x^2 - 2$.

C. $y = x^3 - x + 2$.

D. $y = x^3 - x - 2$.

Lời giải

Chọn D

Để thấy đồ thị hàm số đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$.

Mặt khác đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.

Suy ra hàm số cần tìm là $y = x^3 - x - 2$.

Câu 2. Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28; |\vec{a} + \vec{b}| = 48$. Độ dài vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ bằng?

A. 25.

B. $\sqrt{616}$.

C. 9.

D. $\sqrt{618}$.

Lời giải.

Chọn B

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2) - (\vec{a} + \vec{b})^2$$

$$= 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2(26^2 + 28^2) - 48^2 = 616$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{616}.$$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 2; -1), B(-1; -x; 1), C(7; -1; y)$. Khi A, B, C thẳng hàng, giá trị $x + 2y$ bằng

A. -8.

B. -4.

C. -5.

D. -11.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; -x-2; 2); \overrightarrow{AC} = (4; -3; y+1).$

$$\text{Để } A, B, C \text{ thẳng hàng thì } \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = k.4 \\ -x-2 = k.(-3) \\ 2 = k.(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ x = -5 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Vậy $x+2y = -5-6 = -11$.

Câu 4. Thống kê chiều cao của 40 học sinh lớp 12 của một trường THPT, ta có bảng số liệu sau:

Chiều cao (cm)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số học sinh	4	10	16	8	2

Cỡ của mẫu số liệu là

A. 5.

B. 30.

C. 40
Lời giải.

D. 175.

Chọn C

Câu 5. Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[0; \pi]$.

A. $\frac{47\pi}{18}$.

B. $\frac{4\pi}{18}$.

C. $\frac{45\pi}{18}$.

D. $\frac{7\pi}{18}$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có:

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - \frac{\pi}{6} = 2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 5x - \frac{\pi}{6} = -2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên ta có :

$$+) \text{ Với } x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \Rightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{19}{12}, \text{ do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1 \text{ nên } x = \frac{11\pi}{18}.$$

$$+) \text{ Với } x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{-1}{4} \leq k \leq \frac{13}{4}, \text{ do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\} \text{ nên}$$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}; \frac{9\pi}{14}; \frac{13\pi}{14} \right\}.$$

$$\text{Tổng tất cả các nghiệm là: } \frac{11\pi}{18} + \frac{\pi}{14} + \frac{5\pi}{14} + \frac{9\pi}{14} + \frac{13\pi}{14} = \frac{47\pi}{18}.$$

Câu 6. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b) \right) = 0$. Giá trị $a - 4b$ bằng

A. 3.

B. 5.

C. -1.
Lời giải.

D. 2.

Chọn B

Nếu $a \leq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b) \right) = +\infty$.

Xét $a > 0$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b) \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - ax \right) - b \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 3x + 1 - a^2 x^2}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + ax} - b \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(4 - a^2)x^2 - 3x + 1}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + ax} - b \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-a^2=0 \\ a>0 \\ \frac{-3}{2+a}-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Vậy $a-4b=5$.

Câu 7. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2-4}}{x-1}$ có ba đường tiệm cận?

A. 8

B. 10

C. 7
Lời giải.

D. 9

Chọn C

TH1: Với $m \leq 0$ thì hàm số không xác định nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: Với $m > 0$

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{m}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{m}}; +\infty\right) \\ x \neq 1 \end{cases}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2-4}}{x-1} = \sqrt{m}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2-4}}{x-1} = -\sqrt{m}$, do đó đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang là $y = \sqrt{m}$ và $y = -\sqrt{m}$.

+) Nếu $-\frac{2}{\sqrt{m}} < 1 < \frac{2}{\sqrt{m}} \Leftrightarrow m < 4$ thì đồ thị hàm số chỉ có 2 đường tiệm cận ngang mà không có đường tiệm cận đứng. Do đó không thỏa mãn.

+) Nếu $m = 4$ khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4x^2-4}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ nên $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị. Khi đó đồ thị có 3 đường tiệm cận nên $m = 4$ thỏa mãn yêu cầu

+) Nếu $m > 4$ khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{mx^2-4}}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{mx^2-4}}{x-1} = -\infty$ nên $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị. Khi đó đồ thị có 3 đường tiệm cận nên $m > 4$ thỏa mãn yêu cầu

Do m nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m \in \{4;5;6;7;8;9;10\}$. Vậy có 7 giá trị nguyên của m thuộc $[-10;10]$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

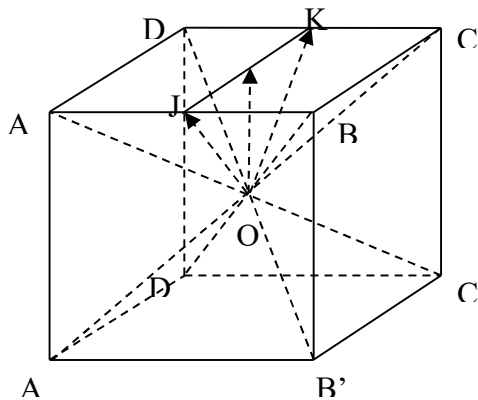
B. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

C. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

D. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

Lời giải.

Chọn A



+ Gọi J, K lần lượt là trung điểm của AB, CD .

+ Ta có: $2\vec{OI} = \vec{OJ} + \vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(4;1;5), B(3;2;1), C(-3;4;2)$. Điểm $M(a;b;0)$ sao cho $S = \vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MA}$ nhỏ nhất. Giá trị $3a + b$ bằng:

A. $\frac{19}{3}$

B. $\frac{28}{3}$

C. $\frac{11}{3}$

D. $\frac{20}{3}$

Lời giải.

Chọn A

Gọi $D(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}; 3), E(0; 3; \frac{3}{2}), F(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2})$ là trung điểm các cạnh AB, BC, AC .

Ta có: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MD} + \vec{DA})(\vec{MD} + \vec{DB}) = (\vec{MD} + \vec{DA})(\vec{MD} - \vec{DA}) = MD^2 - AD^2 = MD^2 - \frac{AB^2}{4}$

Phân tích tương tự với $\vec{MB} \cdot \vec{MC}; \vec{MC} \cdot \vec{MA}$

Khi đó,

$$S = \vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MA} = MD^2 + ME^2 + MF^2 - \frac{AB^2 + BC^2 + AC^2}{4}$$

S nhỏ nhất khi $MD^2 + ME^2 + MF^2$ nhỏ nhất

Gọi G là trọng tâm của $\triangle DEF \Rightarrow G(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{8}{3})$

$$MD^2 + ME^2 + MF^2 = 3MG^2 + GD^2 + GE^2 + GF^2$$

$MD^2 + ME^2 + MF^2$ nhỏ nhất khi MG nhỏ nhất.

Do $M(a;b;0) \in (Oxy) \Rightarrow M$ là hình chiếu của G lên mặt phẳng $Oxy \Rightarrow M(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow 3a + b = \frac{19}{3}$$

Câu 10. Cho bảng số liệu khảo sát về tuổi thọ (đơn vị: nghìn giờ) của một loại bóng đèn:

Tuổi thọ	$[3; 5)$	$[5; 7)$	$[7; 9)$	$[9; 11)$	$[11; 13)$
Số bóng đèn	11	20	29	40	30

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên?

A. $\Delta_Q = \frac{87}{8}$.

B. $\Delta_Q = \frac{206}{29}$.

C. $\Delta_Q = \frac{4171}{232}$.

D. $\Delta_Q = \frac{875}{232}$.

Lời giải.

Chọn D

Cỡ mẫu $n = 130$.

Gọi x_1, x_2, \dots, x_{130} là mẫu số liệu tuổi thọ của các bóng đèn được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, x_2, \dots, x_{11} \in [3; 5); \quad x_{11}, x_{12}, \dots, x_{31} \in [5; 7); \quad x_{32}, x_{33}, \dots, x_{60} \in [7; 9); \quad x_{61}, x_{62}, \dots, x_{100} \in [9; 11);$
 $x_{101}, x_{102}, \dots, x_{130} \in [11; 13)$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $x_{33} \in [7; 9)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_1 = 7 + \frac{\frac{130}{4} - (11 + 20)}{29} \cdot (9 - 7) = \frac{206}{29}$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $x_{98} \in [9; 11)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_3 = 9 + \frac{\frac{130.3}{4} - (11 + 20 + 29)}{40} \cdot (11 - 9) = \frac{87}{8}$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \frac{87}{8} - \frac{206}{29} = \frac{875}{232}.$$

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{6 - 2(m+1)\cos^2 x + m(\sin x - \cos x)^2}}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số

đã cho xác định trên R là $m \in (a; b)$. Tính $a^2 - b^2$.

A. -7.

B. 25.

C. 11.

D. 7.

Lời giải.

Chọn D

Hàm số xác định trên $R \Leftrightarrow 6 - 2(m+1)\cos^2 x + m(\sin x - \cos x)^2 > 0$ với $\forall x \in R$
 $\Leftrightarrow m \sin 2x + (m+1)\cos 2x < 5$ với $\forall x \in R \Leftrightarrow \max_{x \in R} (m \sin 2x + (m+1)\cos 2x) < 5$.

$$\Leftrightarrow m^2 + (m+1)^2 < 25 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 < 0 \Leftrightarrow m \in (-4; 3).$$

Suy ra $a = -4; b = 3 \Rightarrow a^2 - b^2 = 7$.

Câu 12. Biết trên đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = 2\log_a x$, $y = 3\log_a x$ (với $a > 1$) lần lượt có 3 điểm A, B, C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B , AB song song với trục hoành và có diện tích bằng 18. Giá trị của a bằng

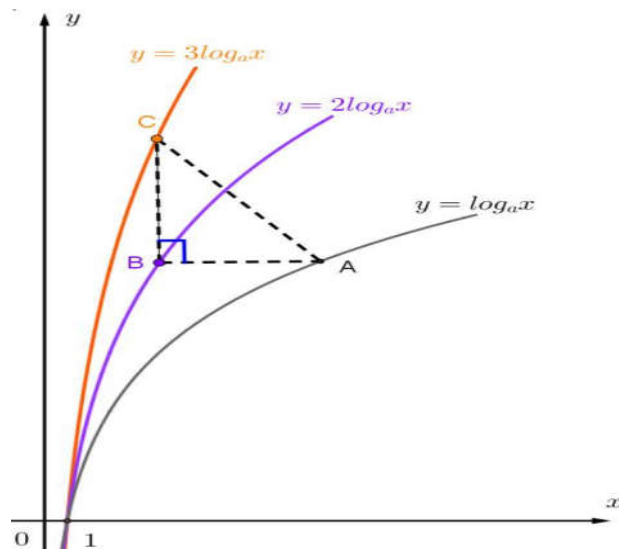
A. $\sqrt[6]{6}$.

B. $\sqrt[3]{3}$.

C. $\sqrt[6]{3}$.

D. $\sqrt[3]{6}$.

Lời giải.



Chọn C

Giả sử $B = (m; 2\log_a m)$ thì $A = (m^2; 2\log_a m)$, $C = (m; 3\log_a m)$, $m > 0$.

Ta có $AB = |m^2 - m|$, $BC = |\log_a m|$.

Vì $AB = BC$, $S_{\triangle ABC} = 18$ nên $\frac{1}{2} AB \cdot BC = 18 \Rightarrow AB = BC = 6$.

$$|m^2 - m| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 6 = 0 \\ m^2 - m + 6 = 0 (VN) \end{cases}; m > 0 \Rightarrow m = 3.$$

$$|\log_a m| = 6 \Leftrightarrow |\log_a 3| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a 3 = 6 \\ \log_a 3 = -6 < 0 \end{cases}; a > 1 \Rightarrow a^6 = 3 \Leftrightarrow a = \sqrt[6]{3}.$$

Câu 13. Bạn An thả quả bóng cao su từ độ cao 10m theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng có độ cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao trước đó. Tính tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn.

A. 40 m.

B. 70 m.

C. 50 m.

D. 80 m.

Lời giải.

Chọn B

Các quãng đường khi bóng đi xuống tạo thành một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 10$ và $q = \frac{3}{4}$.

$$\text{Tổng các quãng đường khi bóng đi xuống là } S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{10}{1 - \frac{3}{4}} = 40.$$

Tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn $2S - 10 = 70$.

Câu 14. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh có tên gọi khác nhau, gồm 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ thành một hàng ngang (trong đó có một học sinh nam tên Dũng và một học sinh nữ tên Lan). Xác suất để giữa hai học sinh nữ liên tiếp có đúng hai học sinh nam và Dũng luôn đứng cạnh Lan bằng

A. $\frac{1}{210}$.

B. $\frac{1}{2520}$.

C. $\frac{1}{840}$.

D. $\frac{1}{1260}$.

Lời giải.

Chọn C

Xếp 10 học sinh thành hàng có: $10!$ (cách) $\Rightarrow n(\Omega) = 10!$

Gọi A “Giữa hai học sinh nữ liên tiếp có đúng hai học sinh nam và Dũng luôn đứng cạnh Lan”

TH1: Xếp Lan đứng đầu hàng (hoặc cuối hàng).

+ Xếp ba bạn nữ còn lại có: $3!$ (cách), (bốn bạn nữ tạo ra các vách ngăn).

+ Xếp Dũng đứng cạnh Lan có: 1 (cách).

+ Xếp 5 bạn nam còn lại vào 5 vị trí xen kẽ giữa 2 bạn nữ sao cho giữa hai nữ có hai nam có: $5!$ (cách)
 \Rightarrow Có: $2.3!.5! = 1440$ (cách).

TH2: Xếp Lan không đứng đầu hàng (hoặc cuối hàng).

+ Xếp bốn bạn nữ thành hàng sao cho Lan đứng thứ 2 (hoặc thứ 3) có: $2.3!$ (cách).

+ Xếp Dũng đứng cạnh Lan có: 2 (cách).

+ Xếp 5 bạn nam còn lại vào 5 vị trí xen kẽ giữa 2 bạn nữ sao cho giữa hai nữ có hai nam có: $5!$ (cách)
 \Rightarrow Có: $2.3!.2.5! = 2880$ (cách).

$$\Rightarrow n(A) = 1440 + 2880 = 4320 \Rightarrow P(A) = \frac{4320}{10!} = \frac{1}{840}$$

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + m + 2 + 3\sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt{x^2 - 4x} + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số

ngịch biến trên khoảng $(-4; -1)$?

A. 17.

B. 18.

C. 58.

D. 57.

Lời giải.

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 4x}$. Khi $x \in (-4; -1)$, ta có $t \in (\sqrt{5}; 4\sqrt{2})$.

Ta có $(\sqrt{x^2 - 4x})' = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x}} < 0, \forall x \in (-4; -1)$.

Do đó hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 4x + m + 2 + 3\sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt{x^2 - 4x} + 2}$ nghịch biến trên khoảng $(-4; -1)$

\Leftrightarrow Hàm số $y = g(t) = \frac{t^2 + 3t + m + 2}{t + 2}$ đồng biến trên khoảng $(\sqrt{5}; 4\sqrt{2})$

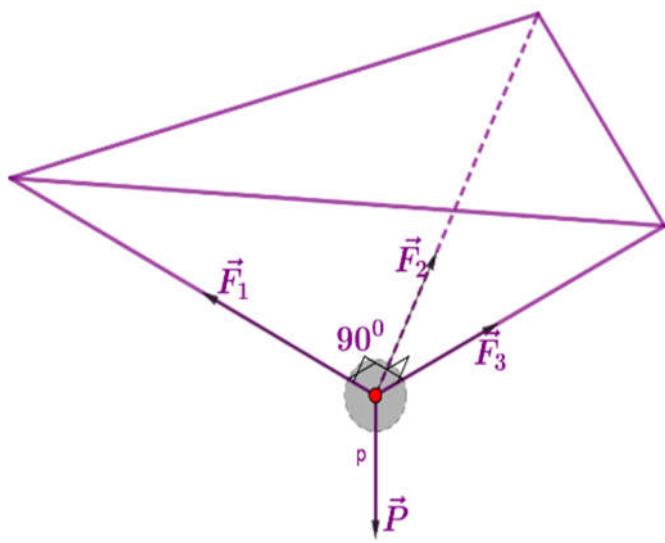
$\Leftrightarrow g'(t) = \frac{t^2 + 4t + 4 - m}{(t + 2)^2} \geq 0, \forall t \in (\sqrt{5}; 4\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow t^2 + 4t + 4 - m \geq 0, \forall t \in (\sqrt{5}; 4\sqrt{2}) \Leftrightarrow m \leq t^2 + 4t + 4, \forall t \in (\sqrt{5}; 4\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow m \leq 9 + 4\sqrt{5} \approx 17,9$.

Vậy có 17 giá trị nguyên dương của m .

Câu 16. Treo một vật nặng có trọng lượng $60N$ bởi ba sợi dây giống hệt nhau, các sợi dây có độ dài bằng nhau và đôi một tạo với nhau một góc 90° như hình bên. Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt là các lực căng của ba sợi dây nói trên. Độ lớn của lực \vec{F}_1 bằng bao nhiêu Niuton? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



A. 37,5.

B. 34,6.

C. 42,2.

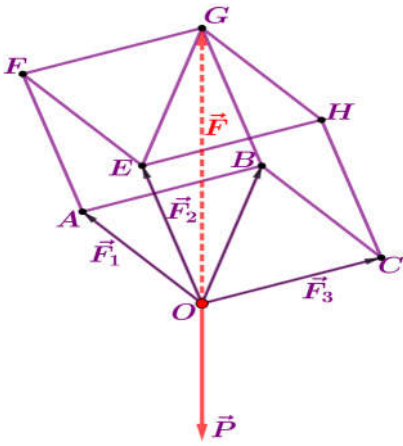
D. 41,9.

Lời giải.

Chọn B

Đặt vị trí vật tại điểm O , dựng lần lượt các vector $\vec{F}_1 = \vec{OA}, \vec{F}_2 = \vec{OE}, \vec{F}_3 = \vec{OC}$.

Dựng hình lập phương $OABC.EFGH$



Vì các sợi dây có độ dài bằng nhau và đôi một tạo với nhau một góc 90° nên $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$.

Theo quy tắc hình hộp, ta có: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{OG} = \vec{F} \Rightarrow |\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3| = |\vec{OG}| = |\vec{F}|$.

Để vật cân bằng thì độ lớn của tổng hợp lực sẽ bằng với trọng lượng của vật.

Từ đó suy ra $|\vec{F}| = 60 \text{ N}$, mà $OG = OA \cdot \sqrt{3}$ nên $|\vec{F}_1| = \frac{60}{\sqrt{3}} \approx 34,6 \text{ N}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1)$, $B(2;3;2)$, $C(-1;0;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) để $S = |\vec{MA} - 4\vec{MC}| + |\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}|$ nhỏ nhất.

A. $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$.

B. $M(0;3;0)$.

C. $M\left(1;0;\frac{7}{3}\right)$.

D. $M\left(-\frac{1}{2};0;2\right)$.

Lời giải.

Chọn A

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , suy ra $G(1;2;1)$.

Gọi $H(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\vec{HA} - 4\vec{HC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-x=4(-1-x) \\ 3-y=4(0-y) \\ -1-z=4(2-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow H(-2;-1;3).$$

Nhận thấy G và H nằm về hai phía đối với mặt phẳng (Oxz) ; $HG = \sqrt{22}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= |\vec{MA} - 4\vec{MC}| + |\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| \\ &= |\vec{MH} + \vec{HA} - 4\vec{MH} - 4\vec{HC}| + |\vec{MG} + \vec{GA} + \vec{MG} + \vec{GB} + \vec{MG} + \vec{GC}| = |-3\vec{MH}| + |3\vec{MG}| \\ &= 3(MH + MG) \geq 3GH = 3\sqrt{22}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi H, M, G thẳng hàng theo thứ tự.

Lại do $M \in (Oxz)$ nên S đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của đường thẳng GH với mặt phẳng (Oxz) .

Vậy $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$.

Câu 18. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên dương thỏa mãn $2^{(x-1)(x+1)} \ln[(x+1)^2 + 1] = 2^{y-x-3} \ln \sqrt{x+y-1}$ và $x, y \leq 2025$?

A. 45.

B. 44.

C. 43.

D. 46.

Lời giải.

Chọn B

Điều kiện: $x + y - 1 > 0$.

$$\text{Từ giả thiết } 2^{(x-1)(x+1)} \ln[(x+1)^2 + 1] = 2^{y-x-3} \ln \sqrt{x+y-1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-1} \ln[x^2 + 2x + 2] = 2^{y-x-4} \ln(x+y-1)$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2+3} \ln(x^2 + 2x + 2) = 2^{y-x} \ln(x+y-1)$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2+2x+2} \ln(x^2 + 2x + 2) = 2^{x+y-1} \ln(x+y-1).$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}^+$ nên suy ra $x+y \geq 2$. Do đó: $x+y-1 \geq 1$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t \ln t$ trên $[1; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 \cdot \ln t + 2^t \cdot \frac{1}{t} > 0, \forall t \geq 1$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$.

Ta thấy $f(x^2 + 2x + 2) = f(x+y-1)$.

Suy ra $\Rightarrow x^2 + 2x + 2 = x+y-1$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + x + 3 \leq 2025.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2022 \leq 0 \Rightarrow x \in \left[1; \frac{-1 + \sqrt{8089}}{2}\right]$$

Vậy có 44 giá trị nguyên của x .

Câu 19. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ , với $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$.

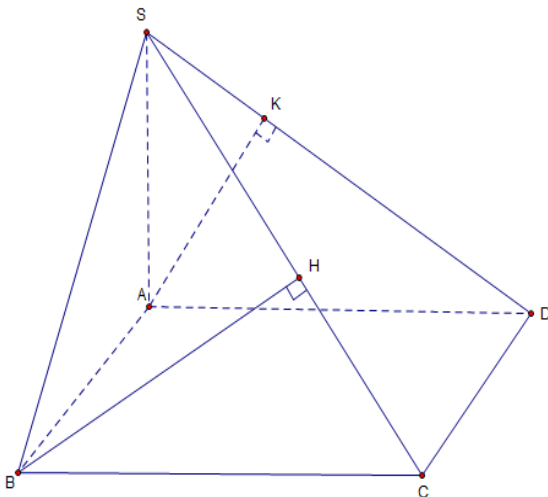
B. $a^3 \sqrt{2}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

D. $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải.

Chọn A



Theo giả thiết $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Đặt $AD = BC = x > 0$, dựng $AK \perp SD$ tại K , $BH \perp SC$ tại H

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK \quad (1)$

Mặt khác $AK \perp SD \quad (2)$. Từ (1) và (2) $\Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK = d_{(A, (SCD))}$.

Do $AB \parallel (SCD) \Rightarrow d_{(A, (SCD))} = d_{(B, (SCD))} = AK = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow BH = \frac{BS \cdot BC}{\sqrt{BS^2 + BC^2}} = \frac{a\sqrt{2}x}{\sqrt{2a^2 + x^2}}$$

$$\text{Khi đó: } \sin \varphi = \frac{d_{(B, (SCD))}}{BH} = \frac{\frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{\frac{a\sqrt{2}x}{\sqrt{2a^2 + x^2}}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} = 3\sqrt{2a^2 + x^2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 \sqrt{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}.$$

Câu 20. Từ 1 hộp đựng 100 thẻ đánh số thứ tự từ 1 đến 100 lấy ngẫu nhiên 3 thẻ. Xác suất của biến cố

A: “Số ghi trên 3 thẻ là số đo 3 cạnh của một tam giác” là:

A. $\frac{95}{132}.$

B. $\frac{65}{132}.$

C. $\frac{35}{236}.$

D. $\frac{55}{236}.$

Lời giải.

Chọn B

$$n(\Omega) = C_{100}^3 = 161700.$$

Gọi x, y, z là số ghi trên 3 thẻ được lấy ra thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đặt: $A_k = \{(x; y; z) / x, y, z \in \{1, 2, \dots, 100\}, 1 \leq x < y < z = k, (x+y) > z\}.$

$$\Rightarrow n(A) = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_{100}|$$

Tính A_k với $(4 \leq k \leq 100)$. Dễ thấy rằng: $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 0$

TH1: k chẵn, $k = 2m$ ($m \geq 2$).

Xét $1 \leq x \leq m, \Rightarrow k = 2m \geq 2x \Rightarrow (k-x) \geq x; (x+y) > z \Rightarrow y > (k-x) \geq x \Rightarrow (k-x+1) \leq y \leq (z-1)$

Ta có số cách chọn y là: $(k-1) - (k-x+1) + 1 = (x-1)$

Xét $x > m, \Rightarrow (x+y) > 2x > 2m = z$ (thỏa mãn đk) $\Rightarrow (x+1) \leq y \leq (z-1) = (2m-1)$

Ta có số cách chọn y là: $(2m-1) - (x+1) + 1 = (2m-x+1)$

$$\text{Vậy, với } k = 2m \text{ ta có: } |A_k| = \sum_{x=1}^m (x-1) + \sum_{x=m+1}^{2m-1} (2m-x-1) = (m-1)^2$$

TH2: k lẻ, $k = (2m+1)$ ($m \geq 2$).

Xét $1 \leq x \leq m, \Rightarrow k = (2m+1) > 2x \Rightarrow (k-x) > x (x+y) > z \Rightarrow y > (k-x) > x \Rightarrow (k-x+1) \leq y \leq (z-1)$

Ta có số cách chọn y là: $(k-1) - (k-x+1) + 1 = (x-1)$

Xét $x > m$, ta thấy rằng: $\forall y$ sao cho $(x+1) \leq y \leq (z-1)$ ta có: $(x+y) \geq x + (x+1) = (2x+1) > (2m+1) = z$ (thỏa mãn đk)

Ta có số cách chọn y là: $(2m+1-1) - (x+1) + 1 = (2m-x)$

$$\text{Vậy, với } k = (2m+1) \text{ ta có: } |A_k| = \sum_{x=1}^m (x-1) + \sum_{x=m+1}^{2m} (2m-x) = m(m-1)$$

$$\Rightarrow n(A) = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_{100}| = (|A_1| + |A_3| + \dots + |A_{99}|) + (|A_2| + |A_4| + \dots + |A_{100}|)$$

$$\Rightarrow n(A) = \sum_{m=0}^{49} m(m-1) + \sum_{m=1}^{50} (m-1)^2 = 39200 + 40425 = 79625$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{79625}{161700} = \frac{65}{132}.$$

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Luật bình phương nghịch đảo phát biểu rằng: Mỗi sự gia tăng khoảng cách từ nguồn cho ra kết quả giảm mức độ âm thanh theo tỷ lệ nghịch với bình phương của sự gia tăng khoảng cách. Sử dụng luật bình phương nghịch đảo, hãy giải quyết bài toán sau: ông Bảo có một mảnh đất lớn có chiều dài mặt tiền là L (mét) ở giữa 2 hai quán karaoke thường phát ra âm thanh có cường độ lần lượt là I_1 và I_2 . Ông Bảo

định xây một ngôi nhà nhỏ trên mảnh đất đó nhưng muốn tìm vị trí sao cho chịu ảnh hưởng của âm thanh từ 2 quán karaoke là ít nhất.

a) Gọi $0 < x < L$ là khoảng cách từ vị trí dự kiến xây ngôi nhà đến quán karaoke có cường độ âm thanh I_1 thì khi ấy mức âm thanh từ hai quán karaoke ảnh hưởng đến ngôi nhà được biểu diễn dưới hàm số

$$f(x) = k \frac{I_1}{x^2} + k \frac{I_2}{(L-x)^2}.$$

b) Nếu $I_1 = I_2$ thì người này nên xây nhà chính giữa hai quán karaoke.

c) Nếu thay đổi I_1 có độ lớn gấp 8 lần I_2 thì người này phải xây nhà cách quán karaoke I_2 một đoạn ngắn hơn lúc đầu là $\frac{L}{6}$ sao cho mức chịu ảnh hưởng vẫn đạt nhỏ nhất.

d) Giả sử khoảng cách từ vị trí dự kiến xây ngôi nhà đến quán karaoke có cường độ âm thanh I_1 bằng $L-2$ sau khi mức âm thanh từ hai quán karaoke ảnh hưởng đến ngôi nhà đạt giá trị nhỏ nhất. Nếu $k = \frac{I_2}{I_1}$ thì k nhận 3 giá trị nguyên.

Lời giải.

(a) Sai: Gọi x là khoảng cách từ vị trí dự kiến xây ngôi nhà đến quán karaoke có cường độ âm thanh I_1 thì khi ấy mức âm thanh từ hai quán karaoke ảnh hưởng đến ngôi nhà được biểu diễn dưới hàm số

$$f(x) = \frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{(L-x)^2} \text{ trong đó } 0 < x < L.$$

Giải thích: do **mỗi** sự gia tăng khoảng cách từ nguồn cho ra kết quả giảm mức độ âm thanh theo tỷ lệ nghịch với bình phương nên giá trị k đề cập ở mệnh đề xem như bằng 1.

(b) Đúng: Xét hàm số $f(x) = \frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{(L-x)^2}$ với $0 < x < L$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = -\frac{2I_1}{x^3} + \frac{2I_2}{(L-x)^3}.$$

$$\text{Giải } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{(L-x)^3} = \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{L}{1+\sqrt[3]{k}}}; k = \frac{I_2}{I_1}$$

Xét $f''(x) = \frac{6I_1}{x^4} - \frac{6I_2}{(L-x)^4}$ dễ thấy $f''\left(\frac{L}{1+\sqrt[3]{k}}\right) > 0$, cùng với $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow L^-} f(x) = +\infty$ nên ta suy ra

$$x = \frac{L}{1+\sqrt[3]{k}} \text{ là điểm cực tiểu của hàm số } f(x) \text{ tức } \min_{(0;L)} f(x) = f\left(\frac{L}{1+\sqrt[3]{k}}\right).$$

Với $I_1 = I_2$ tức $k = 1$ ta suy ra $\min_{(0;L)} f(x) = f\left(\frac{L}{2}\right)$ tức nhỏ nhất khi $x = \frac{L}{2}$

(c) Đúng: Với $I_1 = 8I_2$ tức $k = \frac{1}{8}$ ta suy ra $\min_{(0;L)} f(x) = f\left(\frac{2L}{3}\right)$ tức cường độ âm tổng hợp nhỏ nhất khi

$x = \frac{2L}{3}$ tức khoảng cách từ nhà ông Bảo đến I_1 là $x = \frac{2L}{3}$, khi ấy ta suy ra khoảng cách từ nhà ông Bảo đến

I_2 là $L - \frac{2L}{3} = \frac{L}{3}$. Như vậy khoảng cách giảm đi $\left|\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right| = \frac{L}{6}$ so với tỉ lệ ban đầu là $I_1 = I_2$.

(d) Sai: Từ giả thiết ta có $x = \frac{L}{1+\sqrt[3]{k}} \rightarrow k = \frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{L}{L-2} - 1\right)^3 = \frac{8}{(L-2)^3}$

$$\text{Ta cần } k \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{8}{(L-2)^3} = \left(\frac{2}{L-2}\right)^3 \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{2}{L-2} \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{2}{L-2} = \frac{2}{m}, m \in \mathbb{Z}$$

Do L nguyên dương nên $L-2$ nguyên dương tức m là 1 ước nguyên dương của 2.

Suy ra $m = 1 \rightarrow k = 1, m = 2 \rightarrow k = 8$ tức có 2 giá trị nguyên k .

Câu 2. Công ty bảo hiểm Sunlife có 20000 người đăng kí bảo hiểm. Những người đăng ký được phân theo 3 loại tiêu chuẩn như sau:

Tiêu chuẩn 1. Trẻ hay già;

Tiêu chuẩn 2. Đàn ông hay phụ nữ;

Tiêu chuẩn 3. Đã lập gia đình hay độc thân.

Biết rằng, trong 20000 người đó có 6300 người trẻ, 9600 đàn ông, 13800 người đã lập gia đình, 2700 đàn ông trẻ, 6400 đàn ông đã lập gia đình, 2900 người trẻ đã lập gia đình, và 1100 đàn ông trẻ đã lập gia đình.

a) Có tất cả 6200 người độc thân và 10400 phụ nữ

b) Có tất cả 6800 đàn ông già

c) Xác suất để một người đăng kí bảo hiểm Sunlife được chọn một cách ngẫu nhiên là một người phụ nữ trẻ và độc thân là 9,2%.

d) Xác suất để 1 người trẻ bất kì đăng kí bảo hiểm Sunlife được chọn một cách ngẫu nhiên là một người đàn ông là 37,9%, biết rằng người đó đã lập gia đình.

Lời giải.

(a) Đúng: Từ giả thiết ban đầu ta dễ dàng tính được:

6300 người trẻ (1) và $20000 - 6300 = 13700$ người già (8)

9600 đàn ông (2) và $20000 - 9600 = 10400$ phụ nữ (9)

13800 người đã lập gia đình (3) và $20000 - 13800 = 6200$ người độc thân (10)

(b) Sai: Tương tự mệnh đề A ta cũng tính được:

2700 đàn ông trẻ (4) và 6400 đàn ông đã có gia đình (5)

2900 người trẻ đã lập gia đình (6) và 1100 đàn ông trẻ có gia đình (7)

Lấy (4) – (7) = $2700 - 1100 = 1600$ đàn ông trẻ còn độc thân (11)

Lấy (2) – (4) = $9600 - 2700 = 6900$ đàn ông già (12)

(c) Sai: Ta có 2 cách tính như sau:

+) **Cách 1:** (Sử dụng tiếp kết quả tính được từ mệnh đề A và **(B)**)

Lấy (3) – (6) = $13800 - 2900 = 10900$ người già có gia đình (13)

Lấy (8) – (13) = $13700 - 10900 = 2800$ người già còn độc thân (14)

Lấy (10) – (14) = $6200 - 2800 = 3400$ người trẻ còn độc thân (15)

Lấy (15) – (11) = $3400 - 1600 = 1800$ phụ nữ trẻ còn độc thân.

Gọi M là biến cố “phụ nữ trẻ còn độc thân” thì khi ấy ta suy ra $n(M) = 1800$

Vậy xác suất cần tìm là: $P = \frac{n(M)}{n(\Omega)} = \frac{1800}{20000} = 0,09 = 9\%$.

+) **Cách 2:** Với 2900 người trẻ và 2700 đàn ông trẻ $\rightarrow 6300 - 2700 = 3600$ phụ nữ trẻ (1)

2900 người trẻ lập gia đình và 1100 đàn ông trẻ lập gia đình.

$\rightarrow 2900 - 1100 = 1800$ phụ nữ trẻ lập gia đình (2)

Lấy (1) – (2) suy ra: $3600 - 1800 = 1800$.

Gọi M là biến cố “phụ nữ trẻ còn độc thân” thì khi ấy ta suy ra $n(M) = 1800$.

Xác suất cần tìm là $P = \frac{n(M)}{n(\Omega)} = \frac{1800}{20000} = 0,09$

(d) Đúng: Ta lần lượt gọi các biến cố sau:

A – Người đó là người Trẻ tuổi.

B- Người đó là đàn ông.

C- Người đó đã lập gia đình.

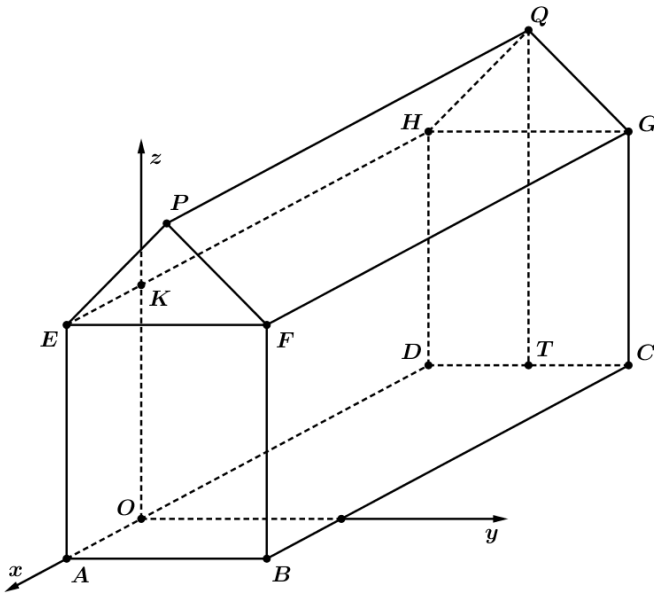
Đối chiếu giả thiết đã cho ta có được: $n(B \cap A \cap C) = 1100$

và $n(A \cap C) = 2900$

Vậy xác suất cần tìm là: $P = \frac{n(B \cap A \cap C)}{n(A \cap C)} = 0,379 = \boxed{37,9\%}$

Câu 3. Một kho chứa hàng có dạng hình lăng trụ đứng $ABFPE.DCGQH$ với $ABFE$ là hình chữ nhật là và EF là tam giác cân tại P . Gọi T là trung điểm của DC . Các kích thước của kho chứa lần lượt

là $AB = 6m$ $AE = 5m$; $AD = 8m$; $QT = 7m$. Người ta mô hình hoá nhà kho bằng cách chọn hệ trục toạ độ có gốc toạ độ là điểm O thuộc đoạn AD sao cho $OA = 2m$ và các trục toạ độ tương ứng như hình vẽ dưới đây. Khi đó:



a) Tọa độ điểm Q là $(-6; 3; 5)$.

b) Góc giữa hai mái nhà (tức mặt phẳng $(EHQP)$ và $(FGQP)$) bằng khoảng 70 độ.

c) Thể tích toàn bộ ngôi nhà bằng $288(m^3)$

d) Người ta muốn lắp camera quan sát trong nhà kho tại vị trí trung điểm của FG và đầu thu dữ liệu đặt tại vị trí O . Người ta thiết kế đường dây cáp nối từ O nối thẳng đến camera (đường dây chỉ đi qua mặt đáy, mặt bên và mái của kho chứa hàng – ngoại trừ các mặt cổng). Độ dài đoạn cáp nối tối thiểu bằng $5 + 2\sqrt{10}$ m.

Lời giải

(a) Sai: Ta dễ thấy khi $QT = 7m$ thì $z_Q = 7 \neq 5$ (mâu thuẫn).

(b) Sai: Từ hình vẽ ta suy ra $OD = AD - OA = 8 - 2 = 6m \rightarrow D(-6; 0; 0)$

Tiếp đến $K \in Oz$ và $AE = 5m$ nên suy ra $K(0; 0; 5) \rightarrow E(-2; 0; 5)$

Tại điểm Q, G ta có $x_G = x_Q = x_T = x_D = -6$ và $y_G = y_C = \overline{CD} = \overline{AB} = 6$

Do T là trung điểm của DC nên $DT = \frac{DC}{2} \rightarrow y_Q = y_T = \frac{y_C}{2} = \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{\overline{AB}}{2} = 3 \rightarrow Q(-6; 3; 7)$

Mà $\overline{HE} \parallel Ox (\vec{i} = (1; 0; 0))$ nên suy ra vector pháp tuyến của mặt phẳng $(EHQP)$ là \vec{n}_1 trong đó $\vec{n}_1 = [\overline{EQ}; \vec{i}] = (0; 2; -3)$

Tiếp đến ta có: $z_G = z_E = 5$ nên $G(-6; 6; 5)$ nên suy ra vector pháp tuyến của mặt phẳng $(FGQP)$ là \vec{n}_2 trong đó $\vec{n}_2 = [\overline{QG}; \vec{i}] = (0; -2; -3)$. Suy ra góc giữa hai mái nhà có cosin là

$$\cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{5}{13} \rightarrow (\vec{n}_1; \vec{n}_2) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) \approx 67,3 \text{ (độ)}$$

(c) Đúng: Thể tích khối lăng trụ $EFP.HGQ$ là $V_1 = AD \cdot \frac{1}{2} |z_Q - z_H| \cdot AB = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot |7 - 5| \cdot 6 = 48(m^3)$

Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ là $V_2 = AB \cdot AD \cdot AE = 240(m^3)$

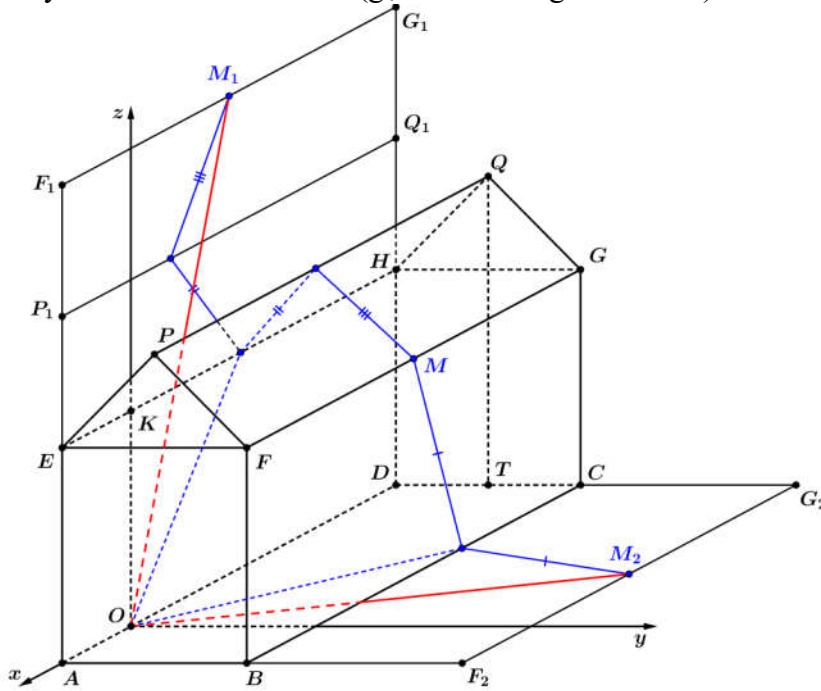
Suy ra thể tích toàn bộ căn nhà này bằng: $V_1 + V_2 = 288(m^3)$

(d) Sai: Ta cần trải phẳng 2 lần như sau:

Lần 1: Trải 2 mặt phẳng $(EHQP)$ và $(FGQP)$ sao cho đồng phẳng liên tiếp với $(ADHE)$

Lần 2: Trái mặt phẳng $(BCGF)$ sao cho đồng phẳng với $(ABCD)$.

Từ đây ta có hình vẽ như sau: (gọi M là trung điểm FG)



$$\text{Ta có } x_{M_1} = x_{M_2} = \frac{x_D}{2} + 1 = -2; \begin{cases} y_{M_1} = 0 \\ y_{M_2} = y_B + \overline{BF_2} = \overline{AB} + \overline{BF} = 6 + 5 = 11 \end{cases}$$

$$\text{Do } d(P; EF) = |z_Q - z_H| = 7 - 5 = 2$$

$$\text{Nên tiếp đến ta có: } \begin{cases} z_{M_1} = z_K + \overline{EP_1} + \overline{P_1F_1} = 5 + 2EP = 5 + 2\sqrt{2^2 + 3^2} = 5 + 2\sqrt{13} \\ z_{M_2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } M_1(-2; 0; 5 + 2\sqrt{13}) \text{ và } M_2(-2; 11; 0)$$

$$\text{Khi ấy quãng đường ngắn nhất cần tìm là } \min\{OM_1; OM_2\} = \left\{ \sqrt{81 + 20\sqrt{13}}; 5\sqrt{5} \right\} = 5\sqrt{5} \text{ (m)}$$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , $AB = 4a$ và $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi H là trung điểm của AO . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$.

a) Gọi α là số đo góc phẳng nhị diện $[S, CD, A]$, khi đó $\tan \alpha = \frac{2}{3}$.

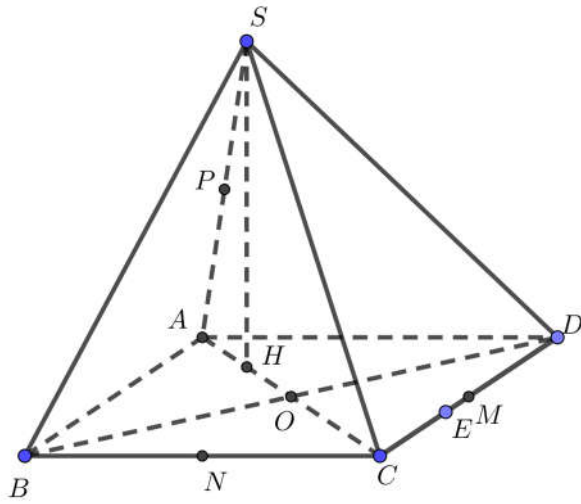
b) Góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc \widehat{BSH} .

c) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $8a^3$.

d) Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của ba cạnh CD , BC và SA . Khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$PN \text{ và } SM \text{ bằng } \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Lời giải



Vì $\widehat{BAD} = 120^\circ$ nên suy ra $\widehat{CAD} = 60^\circ$.

Lại có $DA = DC$ nên tam giác $\triangle ACD$ đều.

Do đó $AM = 2a\sqrt{3}$.

(a) Đúng

Kẻ $HE \perp CD$ ($E \in CD$).

Ta có $\left. \begin{array}{l} HE \perp CD \\ AM \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow HE \parallel AM$.

Áp dụng định lý, ta-let: $\frac{HE}{AM} = \frac{HC}{AC} = \frac{3}{4}$. Theo giả thiết, ta có $\frac{HE}{AM} = \frac{HC}{AC} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow HE = \frac{3}{4} AM = \frac{3}{4} \cdot 2a\sqrt{3} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}.$$

Mặt khác: $CD \perp SH$, $CD \perp HE$ nên suy ra $CD \perp SE$.

Ta có

$$\left. \begin{array}{l} (SCD) \cap (ACD) = CD \\ HE \subset (ACD), HE \perp CD \\ SE \subset (SCD), SE \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow [S, CD, A] = \widehat{SEH} = \alpha.$$

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp HE$, do đó

$$\tan \alpha = \frac{SH}{HE} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}.$$

(b) Sai

Vì $BH \not\subset (SAC)$ nên SH không là hình chiếu của SB lên (SAC)

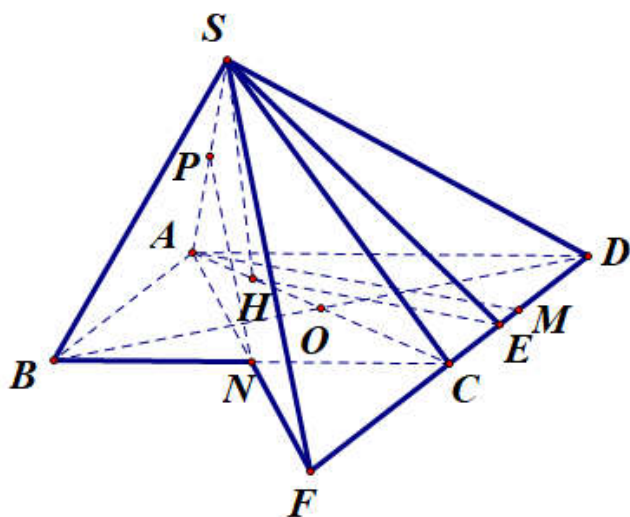
$\Rightarrow (SB, (SAC))$ không bằng góc \widehat{BSH} .

(c) Đúng

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = 2S_{ACD} = 2 \cdot \frac{16a^2\sqrt{3}}{4} = 8a^2\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 8a^2\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = 8a^3.$$

(d) Đúng



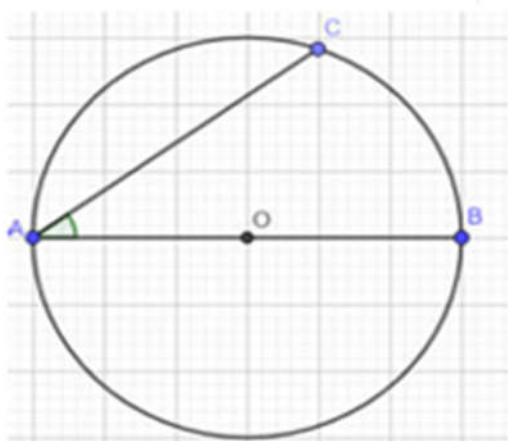
Gọi $AN \cap CD = F$.

Suy ra $PN \parallel SF$

Do đó

$$\begin{aligned} d(PN, SM) &= d(PN, (SFD)) = d(P, (SFD)) = \frac{1}{2} d(A, (SFD)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot d(H, (SFD)) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3a^2 + \frac{27a^2}{4}}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}. \end{aligned}$$

Câu 5. Một khu du lịch sinh thái đang khai thác dịch vụ chèo thuyền và ngắm cảnh ven hồ. Hồ nước có dạng hình tròn tâm O , bán kính bằng 1km và tại hai vị trí A, B đối xứng nhau qua O người ta xây dựng nơi bán vé vào và nơi kết thúc thăm quan. Du khách sẽ được sử dụng dịch vụ chèo thuyền từ vị trí A đến vị trí C trên bờ hồ và sẽ có xe chở ngắm cảnh từ vị trí C men theo bờ hồ đến nơi kết thúc B . Biết rằng vận tốc chèo thuyền là 100m mỗi phút và vận tốc xe chạy ngắm cảnh là 200m mỗi phút. Gọi x (radian) là số đo góc $\widehat{CAB} \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2} \right)$.



- Khi $x = 0$ thời gian đi từ A đến B là 20 phút.
- Quãng đường xe chở người đi ngắm cảnh là $1000x$ (mét).
- Thời gian đi từ A đến B là $20 \cos x + 5x$ (phút).
- Thời gian xe đi từ A đến B luôn ít hơn 22 phút 30 giây với mọi cách chọn từ vị trí điểm C .

Lời giải

(a) Đúng

Khi $x = 0$ thì người đó chèo thuyền thẳng từ A đến B với quãng đường $AB = 2000\text{m}$ nên thời gian đi từ A đến B sẽ là $\frac{2000}{100} = 20$ phút.

(b) Sai

Quãng đường xe chở người đi ngắm cảnh là độ dài cung $l_{\widehat{CB}} = R\alpha = 1000.2x = 2000x$ (mét)

(c) Đúng

Quãng đường AC dài là $AC = AB.\cos x = 2000 \cos x$.

Thời gian đi từ A đến C là $\frac{2000 \cos x}{100} = 20 \cos x$ (phút).

Thời gian đi từ C đến B là $\frac{1000x}{200} = 5x$ (phút).

Thời gian đi từ A đến B là $20 \cos x + 5x$ (phút).

(d) Sai

$$\text{Do } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \cos x \leq 1 \\ 0 \leq 5x < \frac{5\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 20 \cos x \leq 20 \\ 0 \leq 5x < \frac{5\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < 20 \cos x + 5x < 20 + \frac{5\pi}{2}$$

Hay $0 < 20 \cos x + 5x < 27,85$. Vậy với mọi cách chọn vị trí điểm C thì thời gian đi từ A đến B luôn nhỏ hơn 27,85 phút.

Câu 6. Kết quả khảo sát cân nặng của một số quả táo ở một lô hàng cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số quả táo	2	6	12	4	1

a) Cỡ mẫu là $n = 24$.

b) Trung vị của mẫu số liệu thuộc $[160;165)$.

c) Tần số của nhóm chứa trung vị là 6.

d) Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là 161,875.

Lời giải

(a) Sai. Cỡ mẫu là $n = 2 + 6 + 12 + 4 + 1 = 25$.

(b) Đúng. Gọi $x_1; x_2; x_3; \dots; x_{25}$ là cân nặng của 25 quả táo xếp theo thứ tự không giảm.

Do $x_1, x_2 \in [150;155)$; $x_3, \dots, x_8 \in [155;160)$; $x_9, \dots, x_{20} \in [160;165)$ nên trung vị của mẫu số liệu $x_1; x_2; x_3; \dots; x_{25}$ là $x_{13} \in [160;165)$.

(c) Sai. Ta có: $n = 25$. Tần số của nhóm chứa trung vị là $n_m = 12$.

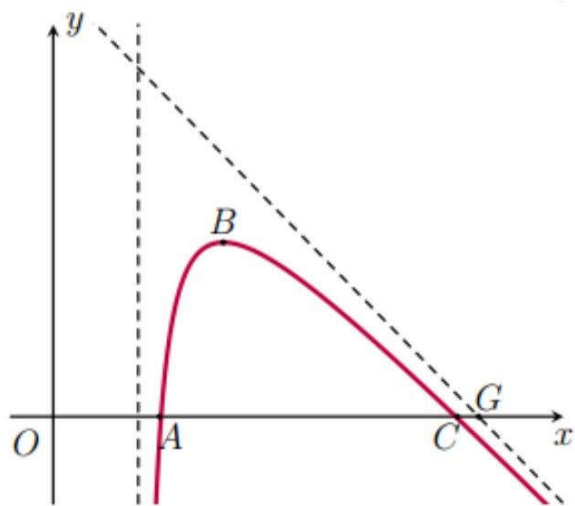
(d) Đúng. $C = 2 + 6 = 8$, $u_m = 160$, $u_{m+1} = 165$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m) = 160 + \frac{\frac{25}{2} - 8}{12} \cdot (165 - 160) = 161,875.$$

PHẦN III. Trả lời ngắn

Câu 1. Một máy bay trình diễn có đường bay gần với hệ trục Oxy được mô phỏng như hình vẽ, trục Ox gần với mặt đất. Đường bay có dạng là một phần của đồ thị của hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x = 2$. Điểm G là giao điểm của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox được gọi là điểm giới hạn. Biết rằng máy bay xuất phát tại vị trí A cách gốc tọa độ O một khoảng 2,5 đơn vị và máy bay khi ở vị trí cao nhất cách điểm xuất phát 1,5 đơn vị theo phương song song với trục Ox và cách mặt đất 4,5 đơn vị. Vị trí máy bay tiếp đất cách điểm giới hạn một khoảng bằng bao nhiêu đơn vị? (Làm tròn đến hàng phần chục)



<key=0,5>

Lời giải

Hàm số bậc hai trên bậc nhất có dạng $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$

Theo giả thiết ra có: $A(2, 5; 0), B(4; 4, 5)$

Vì A, B thuộc đồ thị hàm số nên
$$\begin{cases} 6,25a + 2,5b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 9 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có:

$$f'(x) = \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x_B) = 0 \Rightarrow \frac{a \cdot 4^2 - 4a \cdot 4 - 2b - c}{(4 - 2)^2} = 0 \Rightarrow 2b + c = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = -1, b = 12,5, c = -25$

Khi đó
$$f(x) = \frac{-x^2 + 12,5x - 25}{x - 2} = -x + 10,5 - \frac{4}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 10,5)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + 10,5 - \frac{4}{x - 2} + x - 10,5 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x - 2} = 0$$

Vậy $y = -x + 10,5$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

$$\begin{cases} y = -x + 10,5 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10,5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow G(10,5; 0)$$

Tọa độ giao điểm G là nghiệm của hệ phương trình

Tương tự ta tìm được $A(2, 5; 0), C(10; 0)$

$$CG = x_G - x_C = 10,5 - 10 = 0,5$$

Vậy vị trí máy bay tiếp đất cách điểm giới hạn một khoảng 0,5 đơn vị.

Câu 2. Chi phí về nhiên liệu của một con tàu được chia làm hai phần. Phần chi phí thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ tàu và bằng 480 nghìn đồng mỗi giờ. Chi phí phần thứ hai trên 1km đường tỉ lệ thuận với lập phương của tốc độ tàu (tốc độ tàu tính theo km/h), khi tốc độ bằng 20km/h thì chi phí phần thứ hai bằng 100 nghìn đồng mỗi giờ. Giả sử con tàu đó luôn giữ nguyên tốc độ di chuyển, để tổng chi phí nhiên liệu trên 1km đường là nhỏ nhất thì tốc độ của con tàu đó bằng bao nhiêu km/h? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

<key=22,5>

Lời giải.

Gọi x (km/h) là tốc độ của tàu. Thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là $\frac{1}{x}$ (giờ).

Chi phí tiền nhiên liệu phần thứ nhất cho quãng đường l km là $\frac{480}{x}$ (nghìn đồng).

Gọi y (nghìn đồng) là chi phí nhiên liệu phần thứ hai cho quãng đường l km ứng với tốc độ x .

Ta có y tỉ lệ thuận với lập phương tốc độ nên $y = kx^3$ với $k > 0$

Khi tốc độ $x = 20$ (km/h) thì thời gian tàu chạy l km là $\frac{l}{20}$ (giờ) nên chi phí phần thứ 2 cho quãng đường l km là $\frac{l}{20} \cdot 100 = 5$ (nghìn đồng).

Suy ra $5 = k \cdot 20^3$ nên $k = \frac{1}{1600}$, do đó $y = \frac{1}{1600}x^3$.

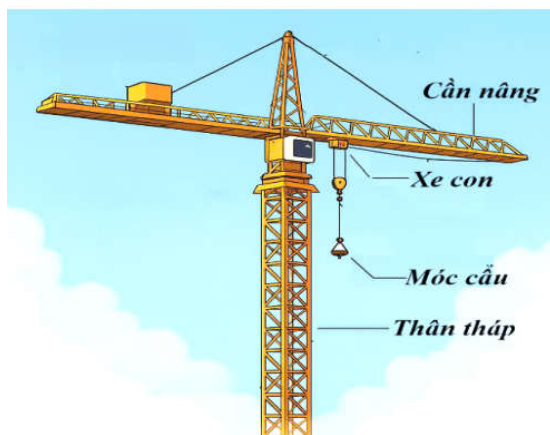
Vậy tổng chi phí tiền nhiên liệu cho l km đường là $P(x) = \frac{480}{x} + \frac{x^3}{1600}$.

Bài toán trở thành tìm x để $P(x)$ nhỏ nhất.

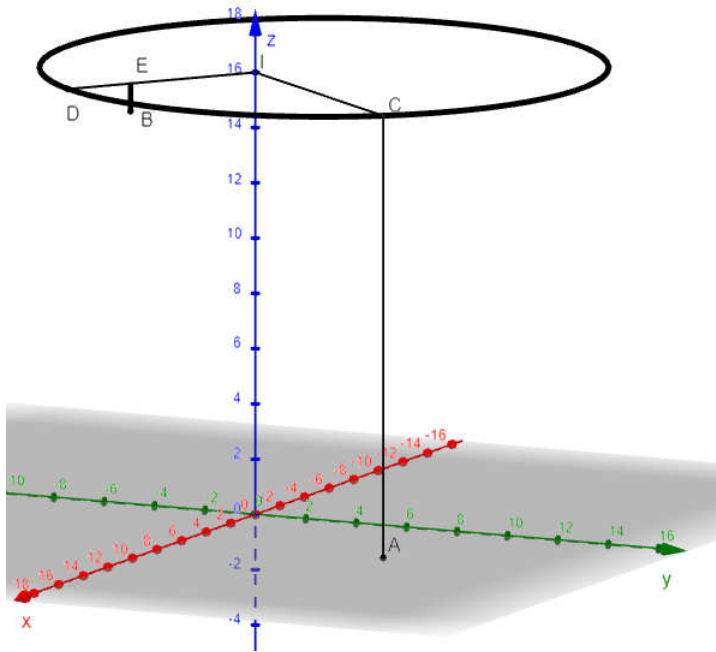
Ta có $P'(x) = -\frac{480}{x^2} + \frac{3x^2}{1600} = 0 \Leftrightarrow x = 4\sqrt[4]{1000}$.

Vậy để tổng chi phí trên l km đường nhỏ nhất thì vận tốc của tàu là $x = 4\sqrt[4]{1000} \approx 22,5$ (km/h).

Câu 3. Người ta thường dùng cầu trục tháp (như hình dưới) để vận chuyển vật liệu xây dựng; thân tháp vuông góc với mặt đất, cần nâng vuông góc thân tháp dùng để làm điểm tựa nâng vật liệu, trên cần nâng có bộ phận gọi là xe con, có thể chạy dọc cần nâng nhằm di chuyển vật liệu. Ban đầu vật liệu ở mặt đất, cầu trục dùng móc cầu nâng vật liệu lên cao theo phương thẳng đứng và cao hơn 1 m so với vị trí cần đặt, sau đó giữ nguyên độ cao và cầu trục quay cần nâng một góc $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$ sao cho quỹ đạo tạo thành một cung tròn cho đến khi mặt phẳng (P) chứa cần nâng và điểm cần đặt vuông góc với mặt đất (vật liệu và điểm cần đặt cùng nằm trên một nửa mặt phẳng (P) so với thân tháp). Tiếp đến điều chỉnh xe con nhằm di chuyển và hạ vật liệu xuống 1 m theo phương thẳng đứng đúng vị trí cần đặt. Giả sử rằng trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, thân tháp là trục Oz và mặt đất là mặt phẳng Oxy (đơn vị tính bằng mét); vị trí ban đầu của vật liệu là điểm $A(6; 8; 0)$ và vị trí cần đặt vật liệu là điểm $B(4; -3; 15)$. Tính quãng đường vật liệu đã di chuyển (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



<key=37,7>
Lời giải



Vì ban đầu vật ở độ cao $z_A = 0$, nâng lên độ cao h sau đó hạ 1 m về độ cao $z_B = 15$ nên vật được nâng lên độ cao $h = 16\text{ m}$

Nâng vật lên ở vị trí A với độ cao h theo phương thẳng đứng, ta được vật đến vị trí $C(6; 8; 16)$

Sau đó quay cần trục góc $\alpha \in (0^0; 180^0)$ sao cho quỹ đạo tạo thành một cung tròn đến vị trí D , điều chỉnh vật theo phương ngang song song với mặt đất đến vị trí E rồi hạ vật xuống 1 m đến đúng vị trí cần đặt là $B(4; -3; 15)$.

Ta có tổng quãng đường vật di chuyển là $S = AC + l_{CD} + DE + EB$ với l_{CD} là độ dài cung tròn \widehat{CD} có tâm là $I(0;0;16)$ và góc ở tâm α

$$\Rightarrow C(6;8;16), E(4;-3;16), \text{ bán kính cung tròn } R = |\overrightarrow{IC}| = 10$$

Ta có $\overrightarrow{IC} = (6; 8; 0); \overrightarrow{IE} = (4; -3; 0) \Rightarrow \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IE} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{IE} \perp \overrightarrow{IC}$, vậy góc $\alpha = 90^0 = \frac{\pi}{2}$

$$+) l_{CD} = R\alpha = 10 \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi;$$

+) $AC = 16$;

+) $IC = R = 10, IE = 5 \Rightarrow DE = DI - IE = 10 - 5 = 5;$

$$+) \quad EB = 1;$$

Suy ra tổng quãng đường vật liệu đã di chuyển là: $S = AC + l_{\text{CD}} + DE + EB = 16 + 5\pi + 5 + 1 \approx 37,7$.

Câu 4. Kí hiệu S là tập tất cả số nguyên m sao cho phương trình $3^{x^2+mx+1} = (3+mx)3^{9x}$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;9)$. Tập S có bao nhiêu phần tử?

<key=11>

Lời giải.

$$3^{x^2+mx+1} = (3+mx)3^{9x} \Leftrightarrow 3^{x^2+mx+1-9x} - (3+mx) = 0 \quad (1)$$

Đề phương trình có nghiệm $3 + mx > 0$ (do $3^{x^2+mx+1-9x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

Khi đó, $3 + mx > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-3}{x} \Leftrightarrow m > -3$ (do $1 < x < 9$)

Xét hàm số $f(x) = 3^{x^2+mx+1-9x} - (3+mx)$

Đạo hàm: $f'(x) = \ln 3 \cdot (2x + m - 9) 3^{x^2 + mx + 1 - 9x} - m$

Đạo hàm cấp 2: $f''(x) = \ln 3 \cdot 2 \cdot 3^{x^2+mx+1-9x} + (\ln 3 \cdot (2x+m-9))^2 \cdot 3^{x^2+mx+1-9x} > 0$

Do đó $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm $\Rightarrow f(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

Mặt khác $x = 0$ là một nghiệm của phương trình (1) nên để phương trình này có nghiệm $x \in (1; 9)$ thì (1) phải có đúng một nghiệm $x \in (1; 9)$

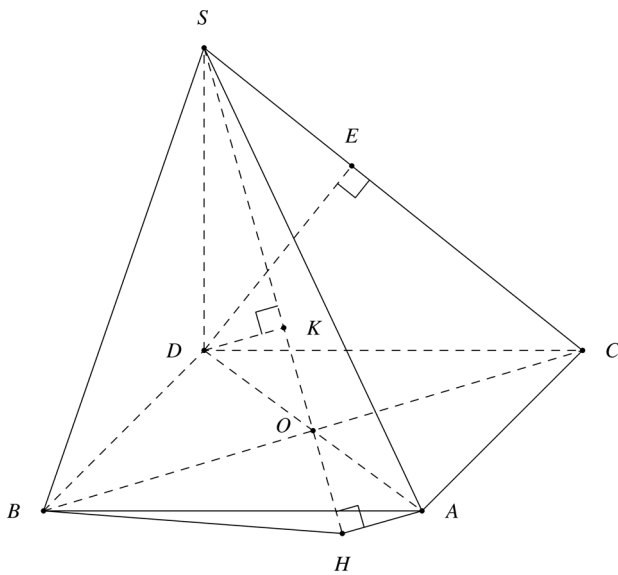
$$\Rightarrow f(1) \cdot f(9) < 0 \Leftrightarrow (3^{m-7} - 3 - m)(3^{1+m} - 3 - 9m) < 0$$

Giải ra ta được $m \in \{-2; -1; 1; \dots; 9\}$ có 11 giá trị.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = AC = a$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính $\cos[A, SB, C]$ (làm tròn đến hàng phần trăm.)

<Key=0,76>

Lời giải.



Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) , suy ra $SD \perp (ABC)$.

Do $SD \perp AB$, $SB \perp AB$ nên $DB \perp AB$.

Tương tự, $SD \perp AC$, $SC \perp AC$ nên $DC \perp AC$.

Suy ra $ABDC$ là hình chữ nhật.

Mà $AB = AC = a$ nên tứ giác $ABDC$ là hình vuông cạnh a .

Trong tam giác vuông SDC , kẻ $DE \perp SC$.

Ta có $AC \perp (SDC) \Rightarrow AC \perp DE$, $SC \perp DE \Rightarrow DE \perp (SAC)$.

Mà $BD \parallel AC$, $AC \subset (SAC) \Rightarrow BD \parallel (SAC)$ nên $d(B, (SAC)) = d(D, (SAC)) = DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông SDC tại D có $DE \perp SC$, áp dụng hệ thức lượng:

$$\frac{1}{DE^2} = \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{SD^2} \Rightarrow SD = \frac{DC \cdot DE}{\sqrt{DC^2 - DE^2}} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \sqrt{3}a.$$

Gọi O là giao điểm của AC và BD , kẻ $DK \perp SO$.

Do $BC \perp AD$, $BC \perp SD \Rightarrow BC \perp (SDO)$, $DK \subset (SDO) \Rightarrow BC \perp DK$.

Suy ra $DK \perp (SBC)$ nên

$$d(D, (SBC)) = DK = \frac{DO \cdot SD}{\sqrt{DO^2 + SD^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3}a}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Trong mặt phẳng (SAD) , kẻ $AH \parallel DK$ với $H \in SO$.

Suy ra $AH \perp (SBC)$ và $AH = DK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Ta có $AH \perp SB$, $AB \perp SB \Rightarrow SB \perp (ABH)$, suy ra góc phẳng nhị diện $[A, SB, C]$ là \widehat{ABH} .

Tam giác vuông ABH tại H , ta có

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{21}}{7}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{7}.$$

Do đó ta có

$$\cos \widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \approx 0,76..$$

Vậy $\cos[A, SB, C] = 0,76$.

Câu 6. Chọn ngẫu nhiên 3 số a, b, c trong tập hợp $S = \{1; 2; \dots; 26\}$. Biết xác suất để 3 số chọn ra thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 5 bằng $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $T = m + n$.

<key=79>

Lời giải.

Gọi A là tập hợp các phần tử thuộc S mà chia hết cho 5, A có 5 phần tử.

B là tập hợp các phần tử thuộc S mà chia cho 5 dư 1 hoặc dư 4, B có 11 phần tử.

C là tập hợp các phần tử thuộc S mà chia cho 5 dư 2 hoặc dư 3, C có 10 phần tử.

Ta có nhận xét

+ Với $k \in A$ thì k^2 chia hết cho 5.

+ Với $k \in B$ thì k^2 chia cho 5 dư 1.

+ Với $k \in C$ thì k^2 chia cho 5 dư 4.

Số phần tử của không gian mẫu là C_{26}^3 .

Để chọn được 3 số thỏa mãn bài toán, ta có hai trường hợp

+ Trường hợp: 3 số được chọn đều thuộc A , có C_5^3 cách chọn.

+ Trường hợp: 3 số được chọn có mỗi số thuộc mỗi tập A, B, C , có $C_5^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^1$ cách chọn.

Suy ra số phần tử của biến cố là $C_5^3 + C_5^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^1$.

Xác suất của biến cố là $\frac{C_5^3 + C_5^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^1}{C_{26}^3} = \frac{14}{65} = \frac{m}{n}$. Suy ra $m + n = 79$.